وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامّة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: العلوم العامة

دورة العام ٢٠٢٤ الاستثنائيّة
الأربعاء في ٢٨ آب ٢٠٢٤

عدد المسائل: سبع | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم:
المدة: ثلاث ساعات | الرقم:

ملاحظة: - يتكون هذا الامتحان من سبع مسائل. يجب اختيار خمس مسائل فقط.
- في حال الإجابة عن أكثر من خمس مسائل، عليك شطب الإجابات المتعلقة بالمسائل التي لم تعد من ضمن اختيارك، لأن التصحيح يقتصر على إجابات المسائل الخمس الأولى غير المشطوبة، بحسب ترتيبها على ورقة الإجابة.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- QCM (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses proposées		
		a	b	c
1	Le domaine de définition de la fonction f donnée par $f(x) = \ln[\ln(x^2)]$ est	$]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; +\infty[$	$]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+\ln x) - \ln(2+\ln x)] =$	$-\infty$	0	1
3	Pour tout nombre complexe z, $\lvert 1+z\rvert^2 - \lvert z\rvert^2 =$	1	$1+z+\bar{z}$	$1+2z$
4	Soit f une fonction deux fois dérivables sur $]0 ; +\infty[$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Si $f''(x) = (\ln x)(e^{-x}+e)(e^{x}-e)$ alors (C)	admet seulement un point d'inflexion	admet deux points d'inflexion	n'admet pas de points d'inflexion
5	Un examen à choix multiples est composé de 6 questions indépendantes. Pour chaque question, 3 réponses sont données dont une exactement est correcte. Le nombre de possibilités qu'un élève répond exactement à deux questions correctes est	16	240	11520
6	A et B sont deux événements d'un même univers Ω tels que $P(B/A) = 0{,}3$, $P(B/\bar{A}) = 0{,}4$ et $P(B) = 0{,}36$ alors $P(A) =$	0,4	0,6	0,64

II- Nombres complexes (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A(1), B(3), M(z) et M'(z') tels que $z' = \dfrac{2z-4}{z-1}$ où $z \neq 1$.

1) Déterminer la forme exponentielle de z' dans le cas où $z = 1+i$.

2) Soit $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a) Montrer que $x' = \dfrac{2x^2+2y^2-6x+4}{(x-1)^2+y^2}$ et $y' = \dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$.

b) Montrer que si M' se déplace sur la droite (D) d'équation $y = x-1$, alors M se déplace sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

3) Pour tout $z \neq 3$ et $z \neq 1$:

a) Montrer que $(z'-1)(z-1) = z-3$.

b) Montrer que $AM' = \dfrac{BM}{AM}$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{AM'}) = (\vec{u} ; \overrightarrow{BM}) - (\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que si M varie sur la droite (d) d'équation $x = 2$ alors M' varie sur un cercle à déterminer.

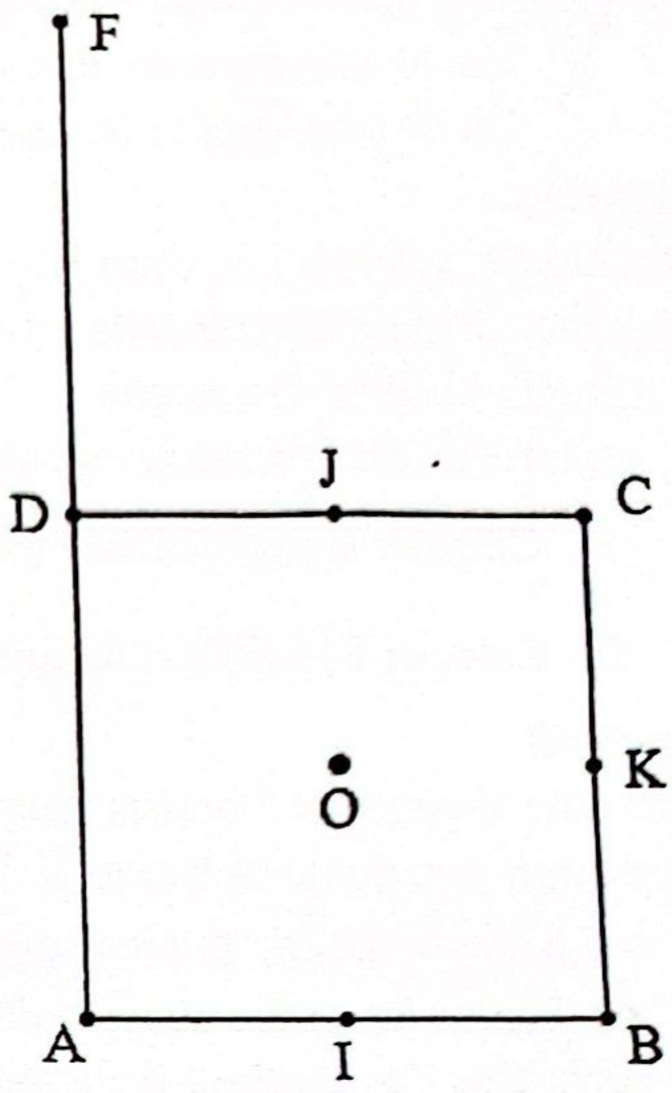
d) Soit I le milieu de [AB]. Montrer que si $M \in [IB]$ alors $M' \in [OA]$.

Scanned with CamScanner

III- Transformations (4 points)

Dans la figure ci-contre :

- ABCD est un carré direct de centre O et de côté 4 cm tel que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
- F est le symétrique du point A par rapport à D.
- I est le milieu de [AB], J celui de [CD] et K celui de [BC].



Soit R la rotation qui transforme F en A et D en B.

Soit h l'homothétie de centre A qui transforme F en D.

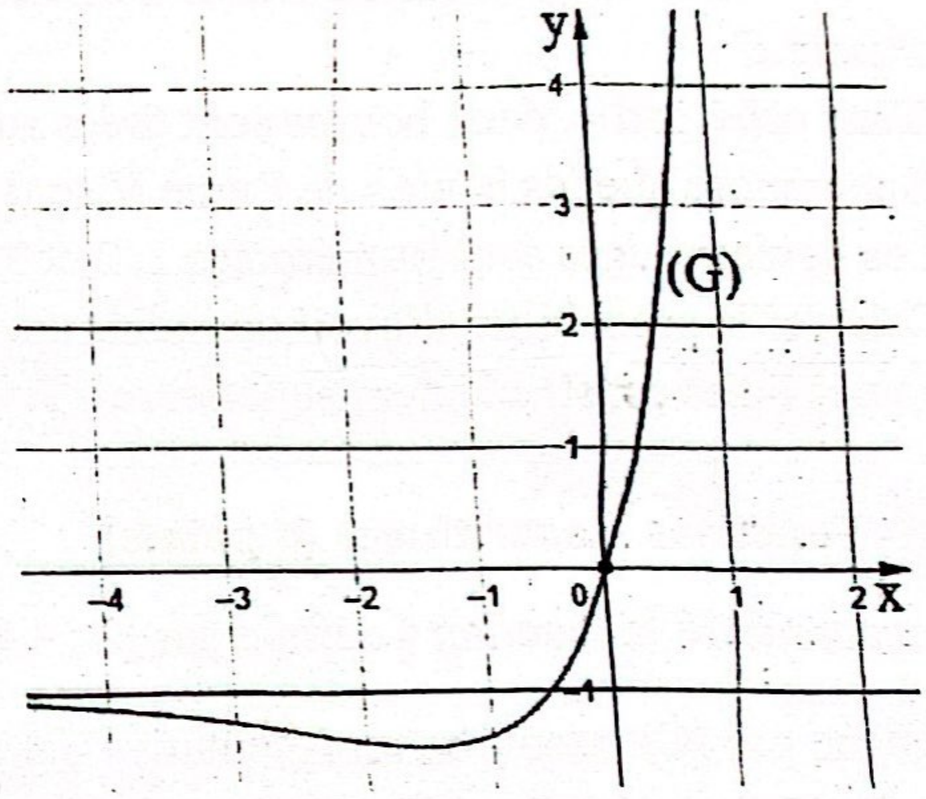
1) Déterminer un angle α de R et montrer que C est son centre.
2) a) Déterminer le rapport k de h.
   b) Déterminer h(B) et vérifier que h(C) = O.
3) Soit $S = h \circ R$.
   a) Déterminer la nature de S. Préciser le rapport et un angle de S.
   b) Déterminer S(F) et S(C).
   c) Déduire une construction du centre W de S.
4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   a) Montrer que la forme complexe de S est $z' = \frac{1}{2}iz + 1$.
   b) Montrer que W, J et F sont alignés.

IV- Fonctions Exponentielles (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans la figure ci-contre, (G) est la courbe représentative de la fonction g définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $g(x) = 2xe^x + e^x - a$ où a est un nombre réel.



1) Montrer que a = 1.
2) Etudier, graphiquement, le signe de g(x).

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $f(x) = xe^{2x} - e^x$ et (C) sa courbe représentative.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Déduire une asymptote à (C).
3) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de g(x).
   b) Dresser le tableau de variations de f.
4) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.
   b) Vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.
5) Calculer f(1) et tracer (C).
6) La courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse β. Montrer que $\alpha - \beta = \ln(4\beta + 4) - \ln\alpha$.

Scanned with CamScanner

V- Probabilité (4 points)

Une urne U contient deux dés parfaits :

- Un dé cubique à six faces numérotées 1, 2 ,3 ,4 ,5 et 6.
- Un dé tétraédrique à quatre faces numérotées 1, 2 ,3 et 4.

Partie A

Rami veut jouer un jeu, dans lequel il tire au hasard un dé de l'urne U, puis il lance une fois ce dé.

On considère les événements suivants :

C : « Le dé tiré est cubique »

A : « Le dé tiré montre les nombres 1 ou 2 ».

1) Calculer la probabilité $P(A / C)$ et vérifier que $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$.

2) Calculer $P(A \cap \overline{C})$ et déduire que $P(A) = \frac{5}{12}$.

Partie B

Une urne V contient 3 boules rouges et 3 boules noires.

Après le tirage du dé de l'urne U, Rami continue le jeu de la façon suivante :

- Si le dé tiré montre les nombres 1 ou 2, Rami tire au hasard 3 boules simultanément de l'urne V.
- Sinon, Rami tire au hasard 3 boules successivement et sans remise de l'urne V.

On considère l'événement R : « Rami tire 3 boules rouges de l'urne V ».

1) Calculer $P(R \cap A)$ et vérifier que $P(R) = \frac{1}{20}$.
2) Sachant que les boules tirées de l'urne V sont toutes rouges, quelle est la probabilité que le dé tiré ne montre ni le nombre 1 ni le nombre 2 ?

Partie C

Dans cette partie, deux boules sont tirées au hasard et simultanément de l'urne V.

On suppose que les boules de l'urne V sont numérotées comme le suivant :

Les boules rouges sont numérotées 1, 2 et 3 et les boules noires sont numérotées 0, 1 et 2.

Calculer la probabilité d'avoir au moins une boule rouge et que la somme des nombres portés par les deux boules tirées est strictement supérieure à 3.

VI- Fonctions Logarithmes (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} (x-1)\ln(x-1) - x & \text{pour } x > 1 \\ -1 & \text{pour } x = 1 \end{cases}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$. Déduire que f est continue en $x = 1$.
2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Interpréter le résultat obtenu.
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
5) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
   b) Vérifier que $4{,}4 < \alpha < 4{,}6$.
6) Calculer $f(9)$ puis tracer (C). (Prendre $\alpha = 4{,}5$).
7) Montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse α coupe $y'y$ au point d'ordonnée $\frac{-\alpha^2}{\alpha - 1}$.
8) Soit h la fonction donnée par $h(x) = \ln[f(x).f'(x)]$.
   Trouver le domaine de définition de h.

Scanned with CamScanner

VII- Suites Numériques (4 points)

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{U_n - 5}$.

1) Calculer U_1 et U_2 puis montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x-8}{x-5}$ où $2 < x \leq 3$.

   a) Montrer que f est strictement croissante pour $2 < x \leq 3$.

   b) Montrer, par récurrence, que $2 < U_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) Montrer que la suite (U_n) est strictement décroissante.

   d) Déduire que (U_n) est convergente.

3) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 4}$.

   a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme V_0 à déterminer.

   b) Exprimer V_n en fonction de n et montrer que $U_n = \dfrac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}$.

   c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Scanned with CamScanner

وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامّة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: العلوم العامة

2024 الاستثنائيّة دورة العام
الأربعاء في 28 آب 2024

عدد المسائل: سبع

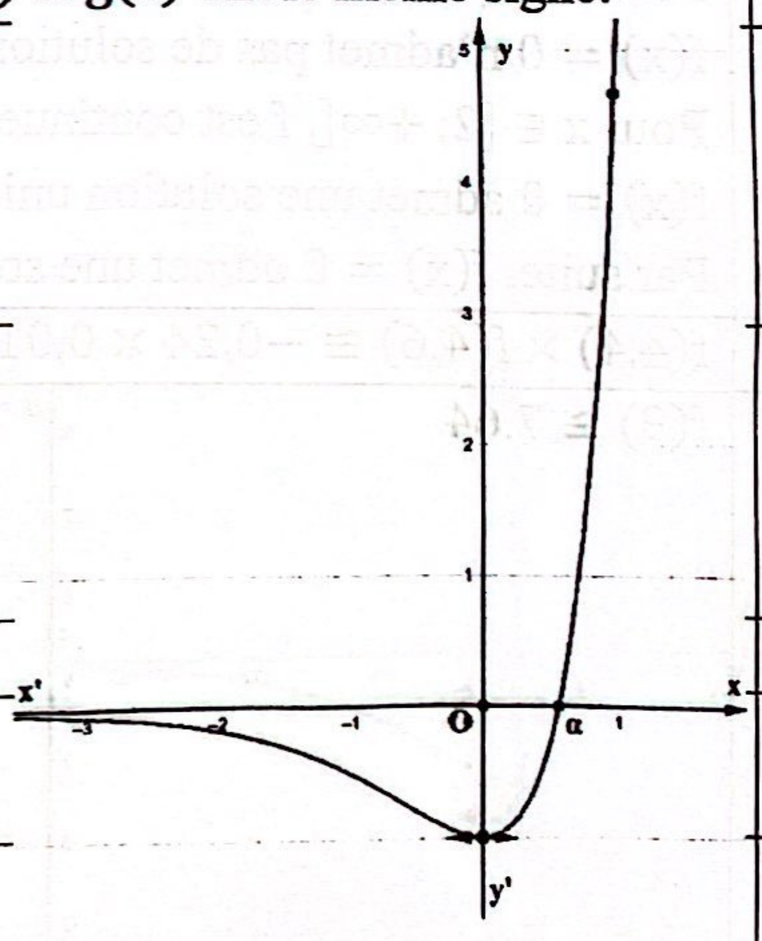
مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ثلاث ساعات

أسس التصحيح

QI	Réponses	6 pts
1	• $x^2 > 0, x \neq 0$ • $\ln(x^2) > 0, x^2 > 1,\ x < -1$ ou $x > 1$ Alors le domaine de f est : $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. **(c) est correcte**	1
2	$\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+\ln x)-\ln(2+\ln x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+\ln x}{2+\ln x}\right)$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln x}{\ln x}\right) = \ln 1 = 0.$ **(b) est correcte**	1
3	$\lvert 1+z\rvert^2 - \lvert z\rvert^2 = (1+z)(\overline{1+z}) - (z)(\bar{z}) = (1+z)(1+\bar{z}) - z\bar{z}$ $= 1+z+\bar{z}+z\bar{z}-z\bar{z} = 1+z+\bar{z}$ **(b) est correcte**	1
4	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\ln x$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$e^{-x}+e$</td><td></td><td>+</td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$e^{x}-e$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr></table>(C) n'a pas de points d'inflexion car il n'ya pas de changement du signe **(c) est correcte**	1
5	Le nombre des possibilités d'un élève qui a deux réponses exactement justes est : $1\times1\times2\times2\times2\times\frac{6!}{2!\times4!} = 240.$ **(b) est correcte**	1
6	$P(B) = P(A)\times P(B/A) + P(\bar{A})\times P(B/\bar{A})$ alors $0{,}36 = P(A)\times 0{,}3 + (1-P(A))\times 0.4$ donc $0{,}36 = -0{,}1P(A) + 0{,}4$ alors $P(A) = \frac{0{,}4-0{,}36}{0{,}1} = 0{,}4.$ **(a) est correcte**	1
QII	**Réponses**	**6 pts**
1	$z' = \frac{2(1+i)-4}{1+i-1} = 2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.	0,5
2a	$x'+iy' = \frac{2x+2yi-4}{x-1+iy}.\frac{x-1-iy}{x-1-iy} = \frac{2x^2-2x-2yi+2y^2-4x+4+4iy}{(x-1)^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2-6x+4}{(x-1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}i$ Alors $x' = \frac{2x^2+2y^2-6x+4}{(x-1)^2+y^2}$ et $y' = \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$	1
2b	$y' = x'-1$ so $\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2-6x+4}{(x-1)^2+y^2} - 1$ then $x^2+y^2-4x-2y+3=0$ donc M varie sur un cercle de centre I (2,1) et de rayon $= \sqrt{4+1-3} = \sqrt{2}$ privé du point A.	1
3a	$z'-1 = \left(\frac{2z-4}{z-1}-1\right) = \frac{2z-4-z+1}{z-1} = \frac{z-3}{z-1}$ donc $(z'-1)(z-1) = z-3.$	0,5
3b	$\lvert z_{M'}-z_A\rvert \times \lvert z_M-z_A\rvert = \lvert z_M-z_B\rvert$ so $AM'\times AM = BM$ alors $AM' = \frac{BM}{AM}$ $\arg(z_{M'}-z_A)+\arg(z_M-z_A) = \arg(z_M-z_B)\ (2\pi)$ donc $(\vec{u},\overrightarrow{AM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM}) = (\vec{u},\overrightarrow{BM})(2\pi)$ alors $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) = (\vec{u},\overrightarrow{BM})-(\vec{u},\overrightarrow{AM})(2\pi)$	1
3c	$M \in (d)$ alors $MA = MB$ donc $AM' = 1$ alors M' varie sur un cercle de centre A et de rayon 1.	1
3d	$M \in [IB]$ alors $(\vec{u},\overrightarrow{BM})-(\vec{u},\overrightarrow{AM}) = \pi(2\pi)$ donc $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) = \pi(2\pi)$ et $AM' = \frac{BM}{AM} < 1$ $(BM < AM)$. donc $M' \in [OA]$.	1

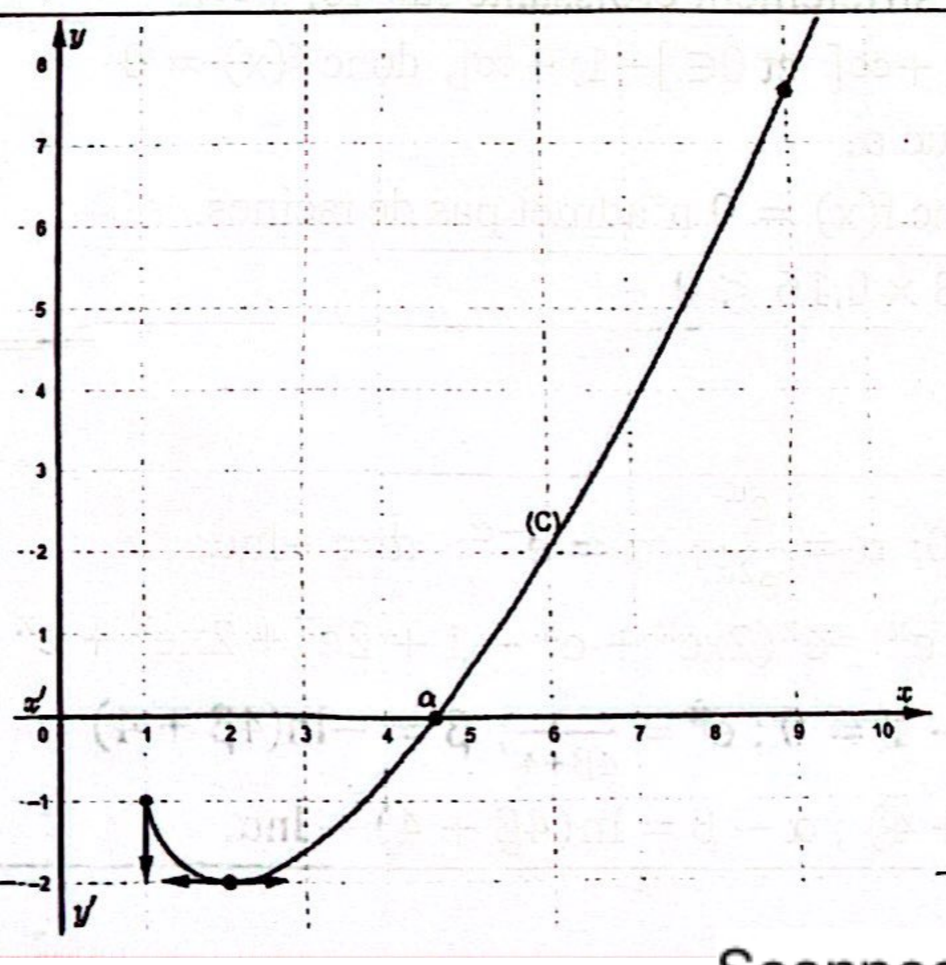
Scanned with CamScanner

QIII	Réponses	6 pts
1	$R(F) = A$ et $R(D) = B$ donc un angle de R est $\alpha = (\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ $CD = CB$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ mais ABCD est un carré direct. Donc $R(C) = C$ alors C est le centre de R. **Ou** $CD = CB$ et $CF = CA$ donc C est le centre de R.	1
2a	$h(A) = A$ et $h(F) = D$ et $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ donc le rapport de h est $k = \frac{1}{2}$	0,5
2b	$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $h(B) = I$ et $h(C) = O$.	1
3a	S est la composée d'une homothétie et d'une rotation, donc S est une similitude de rapport $k = \frac{1}{2}$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.	0,5
3b	$S(F) = h(R(F)) = h(A) = A$ et $S(C) = h(R(C)) = h(C) = O$.	0,5
3c	$S(F) = A$ alors $(\overrightarrow{WF}, \overrightarrow{WA}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc W appartient au cercle (C_1) de diamètre [AF]. $S(C) = O$ alors $(\overrightarrow{WC}, \overrightarrow{WO}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc W appartient au cercle (C_2) de diamètre [CO]. W est le point d'intersection de (C_1) et (C_2) et $W \neq C$ (car $S(C) = O$)	1
4a	$a = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$, $z' = \frac{1}{2}iz + b$ et $S(F) = A$ alors $0 = \frac{1}{2}i(2i) + b$ donc $b = 1$ Alors $z' = \frac{1}{2}iz + 1$ est la forme complexe de S.	1
4b	$z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}i} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$, $z_F = 2i$ et $z_J = 0.5 + i$. $z_{\overrightarrow{WF}} = 2i - \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$ et $z_{\overrightarrow{FJ}} = 0.5 - i$ donc $z_{\overrightarrow{FJ}} = -\frac{5}{8}z_{\overrightarrow{WF}}$. Alors W, F et J sont alignés	0,5
QIV	**Réponses**	**6 pts**
A1	$g(0) = 0$ alors $2(0)e^0 + e^0 - a = 0$; $-a = -1$; $a = 1$	0,5
A2	Pour $x \in]-\infty; 0[$; $g(x) < 0$. Pour $x = 0$; $g(0) = 0$. Pour $x \in]0; +\infty[$; $g(x) > 0$.	0,5
B1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(xe^x - 1) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$	0,25
B2	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x(xe^x) - e^x = 0 \times 0 - 0 = 0$.	0,25
B3a	$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - e^x = e^x(e^x + 2xe^x - 1) = e^x g(x)$. $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.	0,5
B3b	x : $-\infty$; 0 ; $+\infty$ $f'(x)$: $-$; 0 ; $+$ $f(x)$: 0 ↘ -1 ↗ $+\infty$	1
B4a	f est définie, continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc $f(]0, +\infty[) =]-1; +\infty[$ et $0 \in]-1; +\infty[$, donc $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Sur $]-\infty; 0[$, $f(x) < 0$ donc $f(x) = 0$ n'admet pas de racines.	0,75
B4b	$f(0,5) \times f(0,6) \cong -0,28 \times 0,16 < 0$	0,25
5	$f(1) \cong 4.67$ Figure.	1
6	$f(\alpha) = 0$; $\alpha e^{2\alpha} - e^\alpha = 0$; $\alpha = \frac{e^\alpha}{e^{2\alpha}}$; $\alpha = e^{-\alpha}$; $\alpha = -\ln\alpha$; $f''(x) = e^x g(x) + g'(x)e^x = e^x(2xe^x + e^x - 1 + 2e^x + 2xe^x + e^x) = e^x(4xe^x + 4e^x - 1)$ $f''(\beta) = 0$; $4\beta e^\beta + 4e^\beta - 1 = 0$; $e^\beta = \frac{1}{4\beta+4}$; $\beta = -\ln(4\beta + 4)$ $\alpha - \beta = -\ln\alpha + \ln(4\beta + 4)$; $\alpha - \beta = \ln(4\beta + 4) - \ln\alpha$.	1



Scanned with CamScanner

QV	Réponses	6 pts
A1	$P(A/C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $P(A\cap C)=P(A/C)\times P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	0,5 0,5
A2	$P(A\cap \bar{C})=P(A/\bar{C})\times P(\bar{C})=\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ $P(A)=P(A\cap C)+P(A\cap \bar{C})=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$	0,5 0,5
B1	$P(R\cap A)=P(R/A)\times P(A)=\frac{C_3^3}{C_6^3}\times\frac{5}{12}=\frac{1}{20}\times\frac{5}{12}=\frac{1}{48}$ $P(R)=P(R\cap A)+P(R\cap\bar{A})=\frac{1}{48}+P(R/\bar{A})\times P(\bar{A})=\frac{1}{48}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{12}=\frac{1}{48}+\frac{7}{240}=\frac{1}{20}$	1 1
B2	$P(\bar{A}/R)=\frac{P(\bar{A}\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{7}{240}}{\frac{1}{20}}=\frac{7}{12}$	1
C	$\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}\times 5=\frac{1}{3}$	1

QVI	Réponses	6 pts
1	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=0-1=-1$ puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)\ln(x-1)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t\ln t=0$	0,5
2	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(x-1)(\ln(x-1)-1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(\ln(x-1)-1)=-\infty.$ f n'est pas dérivable en $x=1$ et (C) admet une demi-tangente verticale en $x=1$.	1
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x-1)-1\right]=+\infty(+\infty-1)=+\infty$	0,5
4	$f'(x)=\ln(x-1)+(x-1)\left(\frac{1}{x-1}\right)-1=\ln(x-1)+1-1=\ln(x-1).$ $f'(x)\geq 0, \ln(x-1)\geq 0, x-1\geq 1, x\geq 2$ x: 1 | 2 | $+\infty$ f'(x): $\|\|$ − 0 + f(x): -1 ↘ -2 ↗ $+\infty$	1
5a	Pour $x\in[1;2]$, f est continue strictement décroissante de -1 (négative) à -2 (négative) alors $f(x)=0$ n'admet pas de solutions sur $x\in[1;2]$. Pour $x\in[2;+\infty[$, f est continue strictement croissante de -2 (négative) à $+\infty$ (positive) alors $f(x)=0$ admet une solution unique α pour $x\in[2;+\infty[$. Par suite, $f(x)=0$ admet une solution unique α pour $x\in[1;+\infty[$.	0,75
5b	$f(4,4)\times f(4,6)\cong -0,24\times 0,01<0$ alors $4,4<\alpha<4,6$.	0,25
6	$f(9)\cong 7.64$ 	1

Scanned with CamScanner

7 — Equation de la tangente (T): $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = \ln(\alpha-1)(x-\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-1}(x-\alpha)$

(T) coupe y'y en $(0, y)$ alors $y = \frac{\alpha}{\alpha-1}(0-\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$. — **0,5**

8 — $x \in D_f$ et $f(x).f'(x) > 0$

x	1		2		α		+∞
f(x)		−		−	0	+	
f′(x)	‖	−	0	+		+	
f(x).f′(x)	‖	+	0	−	0	+	

Domaine $=]1,2[\cup]\alpha, +\infty[$ — **0,5**

QVII	Réponses	6 pts
1	$U_1 = \frac{3-8}{3-5} = \frac{5}{2}$ et $U_2 = \frac{2.5-8}{2.5-5} = \frac{11}{5}$ $U_1 - U_0 = -\frac{1}{2}$ et $U_2 - U_1 = -\frac{3}{10}$ alors $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$. Donc (U_n) n'est pas géométrique. $\frac{U_1}{U_0} = \frac{5}{6}$ et $\frac{U_2}{U_1} = \frac{22}{25}$ alors $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$. Donc (U_n) n'est pas arithmétique.	**1**
2a	$f'(x) = \frac{3}{(x-5)^2} > 0$ pour tout $x \in]2,3]$, alors f est strictement croissante pour tout $x \in]2;3]$	**0,5**
2b	• $2 < U_0 \leq 3$. Vraie a l'ordre zéro. • Supposons que $2 < U_n \leq 3$ est vraie pour tout n. • Démontrons que $2 < U_{n+1} \leq 3$. $2 < U_n \leq 3$ alors $f(2) < f(U_n) \leq f(3)$ (f est continue et strictement croissante) Donc $2 < f(U_n) \leq 2.5$ donc $2 < U_{n+1} \leq 3$. Par suite $2 < U_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	**1**
2c	• $U_1 < U_0$. Vraie a l'ordre zéro. • Supposons que $U_{n+1} < U_n$ est vraie pour tout n. • Démontrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$. $U_{n+1} < U_n$ alors $f(U_{n+1}) < f(U_n)$ (f est continue et strictement croissante) Donc $U_{n+2} < U_{n+1}$ Par suite $U_{n+1} < U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (U_n) strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.	**1**
2d	(U_n) strictement décroissante et minorée par 2 alors elle est convergente.	**0,5**
3a	$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}-4} = \frac{\frac{U_n-8}{U_n-5}-2}{\frac{U_n-8}{U_n-5}-4} = \frac{-U_n+2}{-3U_n+12} = \frac{1}{3}V_n$ alors (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = \frac{3-2}{3-4} = -1$.	**1**
3b	$V_n = V_0 \times r^n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$. or $V_n = \frac{U_n-2}{U_n-4}$ Donc $U_n = \frac{4V_n-2}{V_n-1} = \frac{4\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)-2}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1} = \frac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n+2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$.	**0,5**
3c	Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{4(0)+2}{0+1} = 2$.	**0,5**

Scanned with CamScanner

وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامّة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: العلوم العامة

دورة العام ٢٠٢٤ الاستثنائيّة
الأربعاء في ٢٨ آب ٢٠٢٤

عدد المسائل: سبع | مسابقة في مادة الرياضيات | الاسم:
المدّة: ثلاث ساعات | الرقم:

ملاحظة: - يتكون هذا الامتحان من سبع مسائل. يجب اختيار خمس مسائل فقط.
- في حال الإجابة عن أكثر من خمس مسائل، عليك شطب الإجابات المتعلقة بالمسائل التي لم تعد من ضمن اختيارك، لأن التصحيح يقتصر على إجابات المسائل الخمس الأولى غير المشطوبة، بحسب ترتيبها على ورقة الإجابة.
- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- MCQ (4 points)

In the table below, only one among the proposed answers to each question is correct.
Write the number of each question and give, **with justification**, the answer that corresponds to it.

N°	Questions	Proposed answers		
		a	b	c
1	The domain of definition of the function f given by $f(x) = \ln[\ln(x^2)]$ is	$]0 , +\infty[$	$]-\infty , +\infty[$	$]-\infty , -1[\cup]1 , +\infty[$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(1+\ln x) - \ln(2+\ln x)] =$	$-\infty$	0	1
3	For all complex numbers z, $\lvert 1+z\rvert^2 - \lvert z\rvert^2 =$	1	$1+z+\bar{z}$	$1+2z$
4	Consider the function f which is twice differentiable over $]0 , +\infty[$ and denote by (C) its representative curve in an orthonormal system. If $f''(x) = (\ln x)(e^{-x}+e)(e^{x}-e)$ then (C)	has one inflection point only	has two inflection points	does not have inflection points
5	A multiple-choice exam is composed of 6 independent questions. For each question, 3 answers are given, one of which is exactly correct. The number of possibilities that a student answers exactly two correct questions is	16	240	11520
6	A and B are two events of the same universe Ω such that $P(B/A) = 0.3$, $P(B/\bar{A}) = 0.4$ and $P(B) = 0.36$ then $P(A) =$	0.4	0.6	0.64

II- Complex numbers (4 points)

The complex plane is referred to an orthonormal system $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Given the points A(1), B(3), M(z) and M′(z′) such that $z' = \dfrac{2z-4}{z-1}$ where $z \neq 1$.

1) Determine the exponential form of z′ in the case where $z = 1 + i$.
2) Let $z = x + iy$ and $z' = x' + iy'$ where x, y, x′ and y′ are real numbers.
   a) Show that $x' = \dfrac{2x^2+2y^2-6x+4}{(x-1)^2+y^2}$ and $y' = \dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$.
   b) Show that if M′ moves on the line (D) with equation $y = x - 1$, then M moves on a circle whose center and radius are to be determined.
3) For all $z \neq 3$ and $z \neq 1$:
   a) Show that $(z'-1)(z-1) = z-3$.
   b) Show that $AM' = \dfrac{BM}{AM}$ and $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + 2k\pi$ where $k \in \mathbb{Z}$.
   c) Show that if M moves on the line (d) with equation $x = 2$ then M′ moves on a circle to be determined.
   d) Let I be the midpoint of [AB]. Show that if $M \in [IB]$ then $M' \in [OA]$.

Scanned with CamScanner

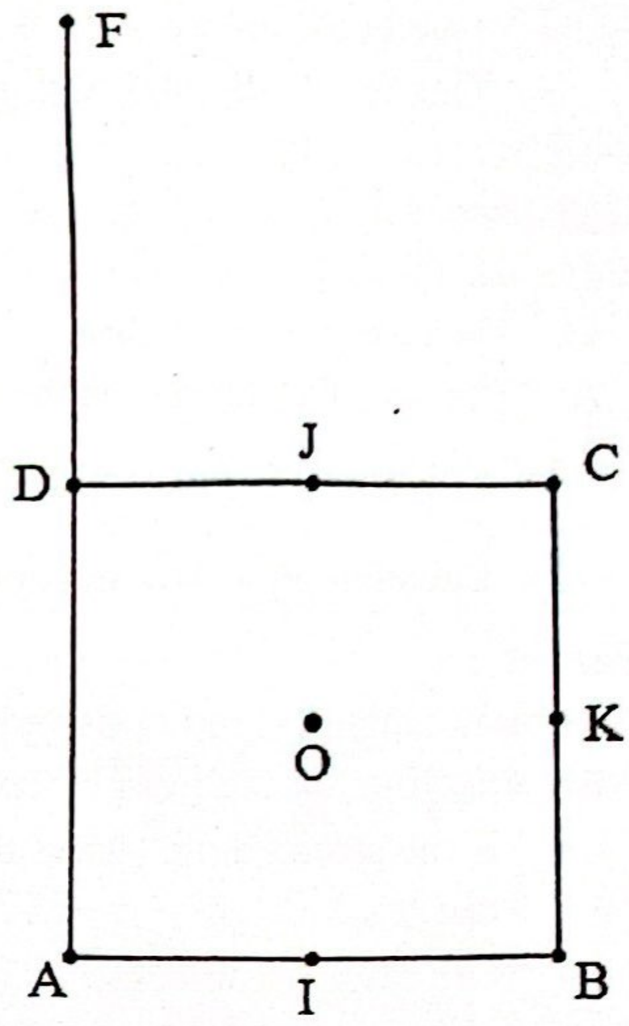
III- Transformations (4 points)

In the adjacent figure:

- ABCD is a direct square of center O and of side 4 cm such that $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
- F is the symmetric of A with respect to D.
- I the midpoint of [AB], J that of [CD] and K that of [BC].

Let R be the rotation that transforms F onto A and D onto B.

Let h be the dilation with center A that transforms F onto D.



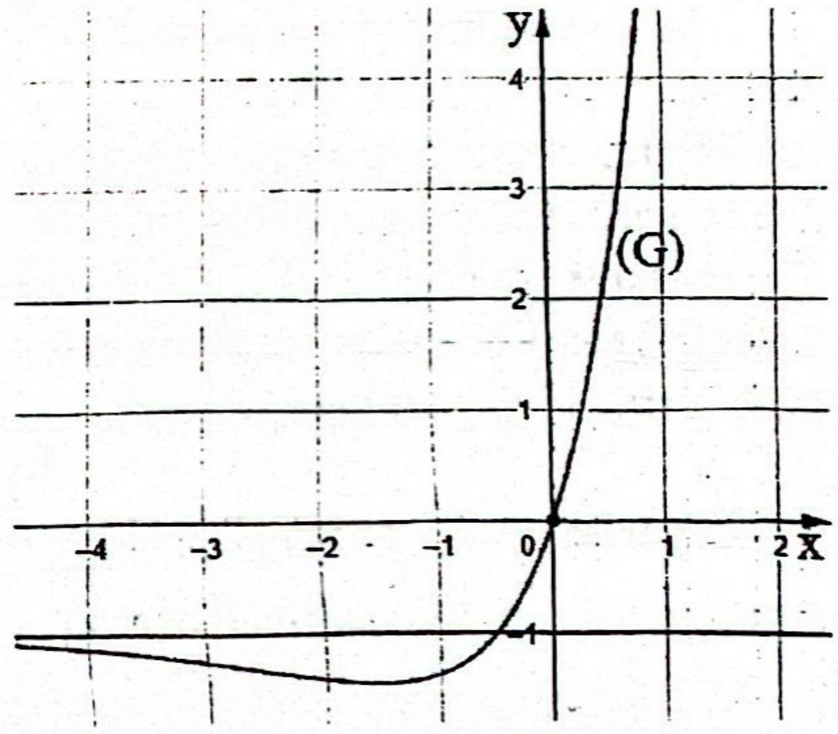
1) Determine an angle of R and show that C is its center.
2) a) Determine the ratio of h.
   b) Determine h(B) and verify that h(C) = O.
3) Let S = h∘R.
   a) Determine the nature of S. Specify the ratio and an angle of S.
   b) Determine S(F) and S(C).
   c) Deduce a construction of the center W of S.
4) The plane is referred to a direct orthonormal system $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.
   a) Show that the complex form of S is $z' = \frac{1}{2}iz + 1$.
   b) Show that W, J and F are collinear.

IV- Exponential Functions (4 points)

The plane is referred to an orthonormal system $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Part A

In the adjacent figure, (G) is the representative curve of the function g defined over $]-\infty\,,+\infty[$ as $g(x) = 2xe^x + e^x - a$ where a is a real number.



1) Show that a = 1.
2) Study, graphically, the sign of g(x).

Part B

Consider the function f defined over $]-\infty\,,+\infty[$ as $f(x) = xe^{2x} - e^x$ and (C) its representative curve.

1) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Deduce an asymptote to (C).
3) a) Express $f'(x)$ in terms of g(x).
   b) Set up the table of variations of f.
4) a) Show that the equation f(x) = 0 has a unique solution α.
   b) Verify that $0.5 < \alpha < 0.6$.
5) Calculate f(1) and draw (C).
6) The curve (C) has an inflection point with abscissa β. Show that $\alpha - \beta = \ln(4\beta + 4) - \ln\alpha$.

Scanned with CamScanner

V- Probability (4 points)

An urn U contains two fair dice:

- One cubic die with six faces numbered 1, 2 ,3 ,4 ,5 and 6.
- One tetrahedral die with four faces numbered 1, 2 ,3 and 4.

Part A

Rami wants to play a game, in which he selects randomly a die from the urn U, then he rolls it once.

Consider the following events:

C: "The selected die is cubic"

A: "The selected die shows the numbers 1 or 2".

1) Calculate the probability P(A / C) and verify that $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$.
2) Calculate $P(A \cap \overline{C})$ and deduce that $P(A) = \frac{5}{12}$.

Part B

An urn V contains 3 red balls and 3 black balls.

After selecting the die from U, Rami continues the game in such a way that:

- If the selected die shows the numbers 1 or 2, Rami selects 3 balls randomly and simultaneously from urn V.
- Otherwise, Rami selects 3 balls randomly successively and without replacement from urn V.

Consider the event R: "Rami selects 3 red balls from V."

1) Calculate $P(R \cap A)$ and verify that $P(R) = \frac{1}{20}$.
2) Knowing that the selected balls from V are all red, what is the probability that the selected die neither shows number 1 nor number 2?

Part C

In this part, two balls are randomly and simultaneously selected from V.

We assume that the balls of the urn V are numbered as follows:

The red balls are numbered 1, 2 and 3 and the black balls are numbered 0, 1 and 2.

Calculate the probability of getting at least one red ball such that the sum of the numbers on the two selected balls is strictly greater than 3.

VI- Logarithmic Functions (4 points)

Consider the function f defined over $[1, +\infty[$ as $f(x) = \begin{cases} (x-1)\ln(x-1) - x & \text{for } x > 1 \\ -1 & \text{for } x = 1 \end{cases}$ and denote by (C) its representative curve in an orthonormal system $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Determine $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$. Deduce that f is continuous at $x = 1$.
2) Determine $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Interpret the result obtained.
3) Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4) Calculate f '(x) and set up the table of variations of f.
5) a) Show that the equation $f(x) = 0$ has a unique solution α.
   b) Verify that $4.4 < \alpha < 4.6$.
6) Calculate f(9) then draw (C) .(Take $\alpha = 4.5$).
7) Prove that the tangent to (C) at the point of abscissa α cuts $y'y$ at the point of ordinate $\frac{-\alpha^2}{\alpha - 1}$.
8) Let h be the function given by $h(x) = \ln[f(x).f'(x)]$.
   Find the domain of definition of h.

Scanned with CamScanner

VII- Sequence (4 points)

For all $n \in \mathbb{N}$, consider the sequence (U_n) defined as $U_0 = 3$ and $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{U_n - 5}$.

1) Calculate U_1 and U_2 then show that the sequence (U_n) is neither arithmetic nor geometric.

2) Let f be the function defined as $f(x) = \dfrac{x-8}{x-5}$ where $2 < x \leq 3$.

   a) Show that f is strictly increasing for $2 < x \leq 3$.

   b) Show, by mathematical induction, that $2 < U_n \leq 3$ for all $n \in \mathbb{N}$.

   c) Show, that the sequence (U_n) is strictly decreasing.

   d) Deduce that (U_n) is convergent.

3) Consider the sequence (V_n) defined as $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 4}$.

   a) Show that the sequence (V_n) is geometric with ratio $\frac{1}{3}$ whose first term V_0 is to be determined.

   b) Express V_n in terms of n and prove that $U_n = \dfrac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}$.

   c) Determine $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Scanned with CamScanner

وزارة التربية والتعليم العالي
المديريّة العامّة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: العلوم العامة

2024 الاستثنائيّة دورة العام
الأربعاء في 28 آب 2024

عدد المسائل: سبع

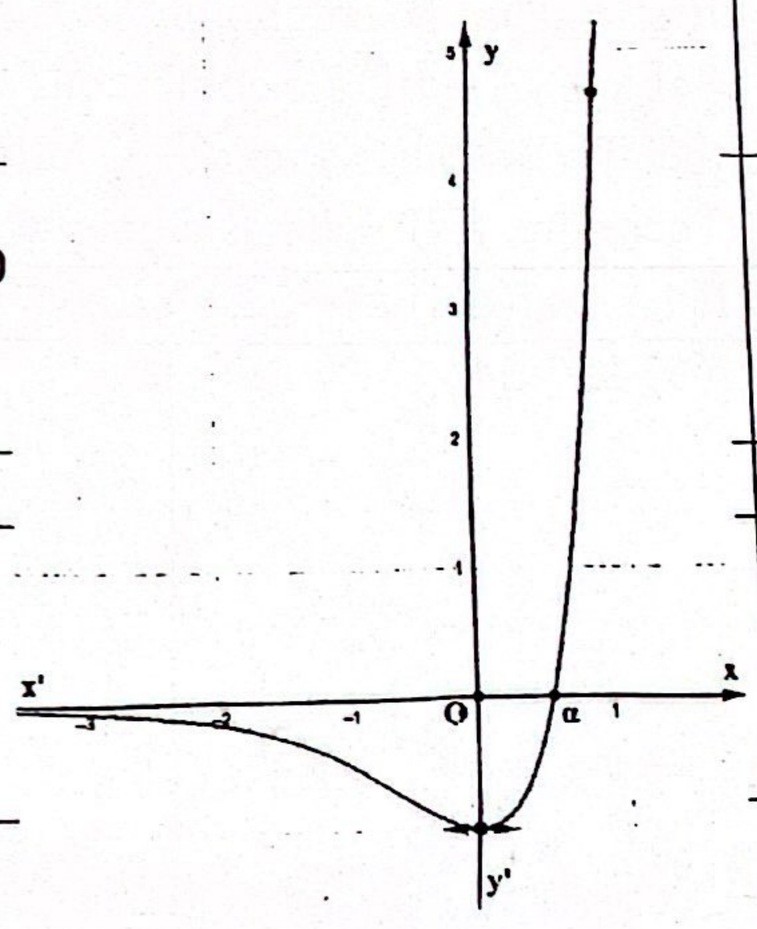
مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ثلاث ساعات

أسس التصحيح

QI	Answer key	6 pts
1	• $x^2 > 0, x \neq 0$ • $\ln(x^2) > 0, x^2 > 1, \ x < -1 \text{ or } x > 1$ Therefore Domain of f is $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. **(c) is correct**	1
2	$\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+\ln x)-\ln(2+\ln x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+\ln x}{2+\ln x}\right)$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln x}{\ln x}\right) = \ln 1 = 0.$ **(b) is correct**	1
3	$\lvert 1+z\rvert^2 - \lvert z\rvert^2 = (1+z)(\overline{1+z}) - (z)(\bar{z}) = (1+z)(1+\bar{z}) - z\bar{z}$ $= 1+z+\bar{z}+z\bar{z}-z\bar{z} = 1+z+\bar{z}$ **(b) is correct**	1
4	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\ln x$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$e^{-x}+e$</td><td></td><td>+</td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$e^{x}-e$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr></table>(C) does not have an inflection point since f' does not change its sign. **(c) is correct**	1
5	The number of possibilities that a student answer exactly two correct questions is: $1\times1\times2\times2\times2\times\frac{6!}{2!\times4!} = 240.$ **(b) is correct**	1
6	$P(B) = P(A)\times P(B/A) + P(\bar{A})\times P(B/\bar{A})$ Then $0.36 = P(A)\times 0.3 + (1-P(A))\times 0.4$ so $0.36 = -0.1P(A) + 0.4$ hence $P(A) = \frac{0.4-0.36}{0.1} = 0.4.$ **(a) is correct.**	1
QII	**Answer key**	**6 pts**
1	$z' = \frac{2(1+i)-4}{1+i-1} = 2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	0.5
2a	$x'+iy' = \frac{2x+2yi-4}{x-1+iy}\cdot\frac{x-1-iy}{x-1-iy} = \frac{2x^2-2x-2yi+2y^2-4x+4+4iy}{(x-1)^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2-6x+4}{(x-1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}i$ Then $x' = \frac{2x^2+2y^2-6x+4}{(x-1)^2+y^2}$ and $y' = \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$	1
2b	$y' = x' - 1$ so $\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2-6x+4}{(x-1)^2+y^2} - 1$ then $x^2+y^2-4x-2y+3=0$ so M moves on a circle of center (2,1) and radius $\sqrt{4+1-3} = \sqrt{2}$ deprived of point A.	1
3a	$z'-1 = \left(\frac{2z-4}{z-1}-1\right) = \frac{2z-4-z+1}{z-1} = \frac{z-3}{z-1}$ then $(z'-1)(z-1) = z-3.$	0.5
3b	$\lvert z_{M'}-z_A\rvert \times \lvert z_M - z_A\rvert = \lvert z_M - z_B\rvert$ so $AM'\times AM = BM$ hence $AM' = \frac{BM}{AM}$ $\arg(z_{M'}-z_A) + \arg(z_M - z_A) = \arg(z_M - z_B)(2\pi)$ so $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) + (\vec{u},\overrightarrow{AM}) = (\vec{u},\overrightarrow{BM})(2\pi)$ hence $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) = (\vec{u},\overrightarrow{BM}) - (\vec{u},\overrightarrow{AM})(2\pi)$	1
3c	$M \in (d)$ then $MA = MB$ hence $AM' = 1$ so M' belongs to a circle with center A and radius 1.	1
3d	$M \in [IB]$ then $(\vec{u},\overrightarrow{BM}) - (\vec{u},\overrightarrow{AM}) = \pi(2\pi)$ so $(\vec{u},\overrightarrow{AM'}) = \pi(2\pi)$ and $AM' = \frac{BM}{AM} < 1$ (since $BM < AM$) . Therefore $M' \in [OA]$.	1

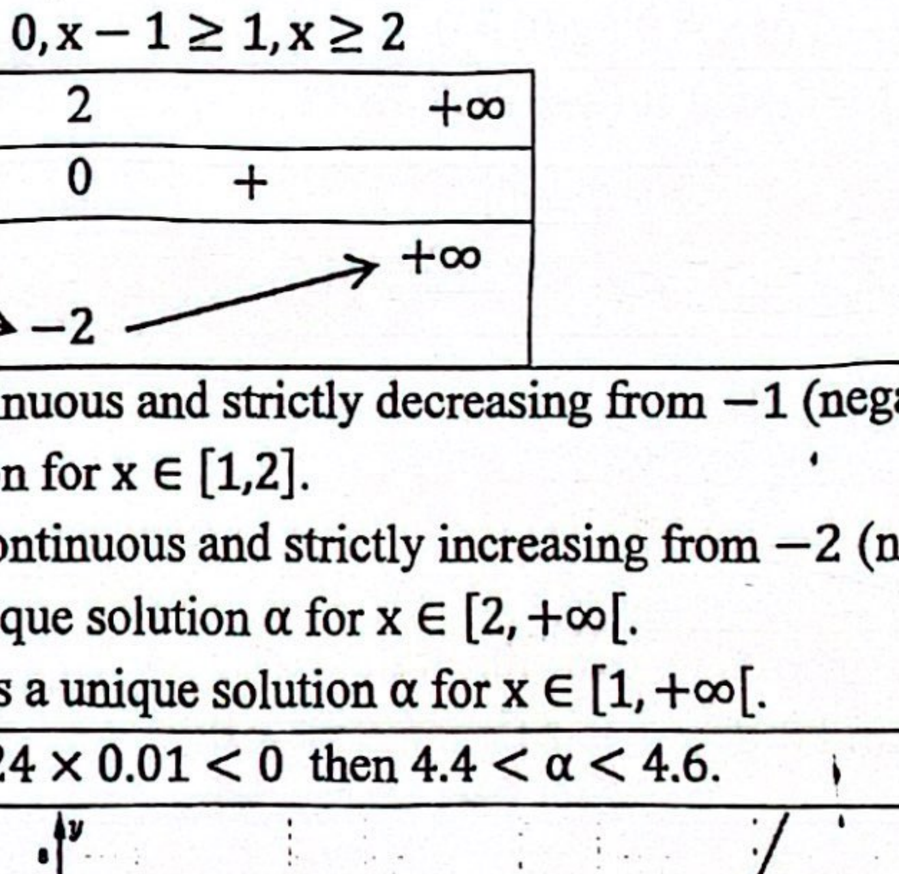
Scanned with CamScanner

QIII	Answer key	6 pts
1	$R(F) = A$ and $R(D) = B$ then the angle of R is $\alpha = (\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ $CD = CB$ and $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ but ABCD is a direct square. So $R(C) = C$ so C is center of R. **OR** $CD = CB$ and $CF = CA$ so C is center of R.	1
2a	$h(A) = A$ and $h(F) = D$ and $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ so the ratio of h is $k = \frac{1}{2}$	0.5
2b	$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ then $h(B) = I$ and $h(C) = O$.	1
3a	S is composite of dilation and rotation then S is similitude of $k = \frac{1}{2}$ and $\alpha = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.	0.5
3b	$S(F) = h(R(F)) = h(A) = A$ and $S(C) = h(R(C)) = h(C) = O$.	0.5
3c	$S(F) = A$ then $(\overrightarrow{WF}, \overrightarrow{WA}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ so W belongs to a circle (C_1) of diameter [AF]. $S(C) = O$ then $(\overrightarrow{WC}, \overrightarrow{WO}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ so W belongs to a circle (C_2) of diameter [CO]. W is the intersection point of (C_1) and (C_2) and $W \neq C$ (since $S(C) = O$)	1
4a	$a = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$, $z' = \frac{1}{2}iz + b$ and $S(F) = A$ then $0 = \frac{1}{2}i(2i) + b$ so $b = 1$ Then $z' = \frac{1}{2}iz + 1$ is the complex form of S.	1
4b	$z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}i} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$, $z_F = 2i$ and $z_J = 0.5 + i$. $z_{\overrightarrow{WF}} = 2i - \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$ and $z_{\overrightarrow{FJ}} = 0.5 - i$ then $z_{\overrightarrow{FJ}} = -\frac{5}{8}z_{\overrightarrow{WF}}$. so , F and J are collinear.	0.5
QIV	**Answer key**	**6 pts**
A1	$g(0) = 0$ then $2(0)e^0 + e^0 - a = 0$; $-a = -1$; $a = 1$	0.5
A2	For $x \in]-\infty; 0[$; $g(x) < 0$. For $x = 0$; $g(0) = 0$. For $x \in]0; +\infty[$; $g(x) > 0$.	0.5
B1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(xe^x - 1) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$	0.25
B2	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x(xe^x) - e^x = 0 \times 0 - 0 = 0$.	0.25
B3a	$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - e^x = e^x(e^x + 2xe^x - 1) = e^x g(x)$. $f'(x)$ and $g(x)$ have same sign.	0.5
B3b	x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$ $f'(x)$: $-$ 0 $+$ $f(x)$: 0 ↘ -1 ↗ $+\infty$	1
B4a	f is defined, continuous and st. increasing over $]0, +\infty[$, then $f(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$ and $0 \in]-1, +\infty[$, then $f(x) = 0$ has a unique solution α. over $]-\infty, 0[$, $f(x) < 0$ then $f(x) = 0$ has no roots.	0.75
B4b	$f(0.5) \times f(0.6) \cong -0.28 \times 0.16 < 0$	0.25
5	$f(1) \cong 4.67$ Figure.	1
6	$f(\alpha) = 0$; $\alpha e^{2\alpha} - e^\alpha = 0$; $\alpha = \frac{e^\alpha}{e^{2\alpha}}$; $\alpha = e^{-\alpha}$; $\alpha = -\ln\alpha$; $f''(x) = e^x g(x) + g'(x)\, e^x = e^x(2xe^x + e^x - 1 + 2e^x + 2xe^x + e^x) = e^x(4xe^x + 4e^x - 1)$ $f''(\beta) = 0$; $4\beta e^\beta + 4e^\beta - 1 = 0$; $e^\beta = \frac{1}{4\beta+4}$; $\beta = -\ln(4\beta + 4)$ $\alpha - \beta = -\ln\alpha + \ln(4\beta + 4)$; $\alpha - \beta = \ln(4\beta + 4) - \ln\alpha$.	1



Scanned with CamScanner

QV	Answer key	6 pts
A1	$P(A/C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $P(A\cap C)=P(A/C)\times P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	0.5 0.5
A2	$P(A\cap\bar{C})=P(A/\bar{C})\times P(\bar{C})=\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ $P(A)=P(A\cap C)+P(A\cap\bar{C})=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$	0.5 0.5
B1	$P(R\cap A)=P(R/A)\times P(A)=\frac{C_3^3}{C_6^3}\times\frac{5}{12}=\frac{1}{20}\times\frac{5}{12}=\frac{1}{48}$ $P(R)=P(R\cap A)+P(R\cap\bar{A})=\frac{1}{48}+P(R/\bar{A})\times P(\bar{A})=\frac{1}{48}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{12}=\frac{1}{48}+\frac{7}{240}=\frac{1}{20}$	1 1
B2	$P(\bar{A}/R)=\frac{P(\bar{A}\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{7}{240}}{\frac{1}{20}}=\frac{7}{12}$	1
C	$\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}\times 5=\frac{1}{3}$	1

QVI	Answer key	6 pts
1	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=0-1=-1$ since $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)\ln(x-1)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t\ln t=0$	0.5
2	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(x-1)(\ln(x-1)-1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(\ln(x-1)-1)=-\infty.$ f is not differentiable at $x=1$ and (C) has a vertical semi-tangent at $x=1$.	1
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x-1)-1\right]=+\infty(+\infty-1)=+\infty$	0.5
4	$f'(x)=\ln(x-1)+(x-1)\left(\frac{1}{x-1}\right)-1=\ln(x-1)+1-1=\ln(x-1).$ $f'(x)\geq 0, \ln(x-1)\geq 0, x-1\geq 1, x\geq 2$ x: 1 | 2 | $+\infty$ $f'(x)$: $-$ | 0 | $+$ $f(x)$: -1 ↘ -2 ↗ $+\infty$	1
5a	For $x\in[1,2]$, f is continuous and strictly decreasing from -1 (negative) to -2 (negative) then $f(x)=0$ has no solution for $x\in[1,2]$. For $x\in[2,+\infty[$, f is continuous and strictly increasing from -2 (negative) to $+\infty$ (positive) then $f(x)=0$ has a unique solution α for $x\in[2,+\infty[$. Therefore, $f(x)=0$ has a unique solution α for $x\in[1,+\infty[$.	0.75
5b	$f(4.4)\times f(4.6)\cong -0.24\times 0.01<0$ then $4.4<\alpha<4.6$.	0.25
6	$f(9)\cong 7.64$ 	1

Scanned with CamScanner

7	Equation of tangent: $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = \ln(\alpha-1)(x-\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-1}(x-\alpha)$ Tangent intersects $y'y$ at the point $(0,y)$ such that $y = \frac{\alpha}{\alpha-1}(0-\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$.	0.5
8	$x \in D_f$ and $f(x).f'(x) > 0$ Domain $=]1,2[\cup]\alpha,+\infty[$	0.5

x	1		2		α		+∞
f(x)		−	‖	−	0	+	
f′(x)	‖	−	0	+	‖	+	
f(x).f′(x)	‖	+	0	−	0	+	

QVII	Answer key	6 pts
1	$U_1 = \frac{3-8}{3-5} = \frac{5}{2}$ and $U_2 = \frac{2.5-8}{2.5-5} = \frac{11}{5}$ $U_1 - U_0 = -\frac{1}{2}$ and $U_2 - U_1 = -\frac{3}{10}$ then $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$. so (U_n) is not A.S. $\frac{U_1}{U_0} = \frac{5}{6}$ and $\frac{U_2}{U_1} = \frac{22}{25}$ then $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$. so (U_n) is not G.S.	1
2a	$f'(x) = \frac{3}{(x-5)^2} > 0$ for all $x \in]2,3]$, then f is strictly increasing for all $x \in]2,3]$	0.5
2b	• $2 < U_0 \leq 3$. • Suppose that $2 < U_n \leq 3$ is true up to n. • R.T.P. $2 < U_{n+1} \leq 3$ $2 < U_n \leq 3$ then $f(2) < f(U_n) \leq f(3)$ (f is continuous and strictly increasing) so $2 < f(U_n) \leq 2.5$ hence $2 < U_{n+1} \leq 3$. therefore $2 < U_n \leq 3$ for all $n \in \mathbb{N}$.	1
2c	• $U_1 < U_0$. • Suppose that $U_{n+1} < U_n$ is true up to n. • R.T.P. $U_{n+2} < U_{n+1}$ $U_{n+1} < U_n$ then $f(U_{n+1}) < f(U_n)$ (f is continuous and strictly increasing) so $U_{n+2} < U_{n+1}$ therefore $U_{n+1} < U_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then (U_n) is strictly decreasing for all $n \in \mathbb{N}$.	1
2d	(U_n) is strictly decreasing and bounded below by 2 then its convergent to L	0.5
3a	$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}-4} = \frac{\frac{U_n-8}{U_n-5}2}{\frac{U_n-8}{U_n-5}4} = \frac{-U_n+2}{-3U_n+12} = \frac{1}{3}V_n$ then (V_n) is G.S. with common ration $r = \frac{1}{3}$ and first term $V_0 = \frac{3-2}{3-4} = -1$.	1
3b	$V_n = V_0 \times r^n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$. But $V_n = \frac{U_n-2}{U_n-4}$ so $U_n = \frac{4V_n-2}{V_n-1} = \frac{4\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)-2}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1} = \frac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n+2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$.	0.5
3c	Since $-1 < \frac{1}{3} < 1$ then $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{4(0)+2}{0+1} = 2$.	0.5

Scanned with CamScanner